1. Polinomul $f = X^4 - 4X^3 + 4X^2 + mX + n \in Q[X]$ se divide cu polinomul $g = X^2 - 4X + 3$ pentru
   a) *m=-4, n=3*
   b) *m=-4, n=4*
   c) *m=4, n=-3*
   d) *m=2, n=-1*

   Soluție:
   Rezolvă ecuația
   $$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 1$$
   $$f(3) = 0 \wedge f(1) = 0$$
   $$\Leftrightarrow 81 - 108 + 36 + 3m + n = 0 \wedge 1 - 4 + 4 + m + n = 0$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m + n = -9 \\ m + n = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -8 \\ m + n = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ n = 3 \end{cases}$$
   R: a)

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 + 2X + m - 1$, având rădăcinile x_1, x_2, x_3.
   a) Arătați că $S = \sum_{i=1}^{3} x_i^3 = -m^3 + 3m + 3$
   b) Determinați valorile lui *m* pentru care $\sum_{i=1}^{3} x_i^3 \geq 3(x_1 x_2 x_3)^2$
   c) Să se determine valorile lui *m* pentru care polinomul *f* este divizibil cu *X-1* și, în acest caz să se găsească rădăcinile reale ale lui *f.*

   Soluție:
   a) Avem $\begin{cases} x_1^3 + mx_1^2 + 2x_1 + m - 1 = 0 \\ x_2^3 + mx_2^2 + 2x_2 + m - 1 = 0 \\ x_3^3 + mx_3^2 + 2x_3 + m - 1 = 0 \end{cases}$. Adunând egalitățile obținem
   $$S + m\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + 2\sum_{i}^{3} x_i + 3m - 3 = 0$$
   $$\Rightarrow S = -m\left(\left(\sum_{i}^{3} x_i\right)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\right) - 2\sum_{i=1}^{3} x_i - 3m + 3$$
   $$\Rightarrow S = -m(m^2 - 2 \cdot 2) - 2(-m) - 3m + 3 = -m^3 + 3m + 3$$
   b) Avem de rezolvat inecuația:
   $$-m^3 + 3m + 3 \geq 3(m-1)^2 \Leftrightarrow -m^3 + 3m + 3 \geq 3m^2 - 6m + 3$$
   $$\Leftrightarrow -m^3 - 3m^2 + 9m \geq 0 \Leftrightarrow -m(m^2 + 3m - 9) \geq 0 \Leftrightarrow m(m^2 + 3m - 9) \leq 0$$
   Rezolvăm ecuația asociată și obținem rădăcinile $m_1 = 0,\ m_2 = \frac{-3(1+\sqrt{5})}{2},\ m_3 = \frac{-3(1-\sqrt{5})}{2}$.
   Facem tabelul semnului

m	-∞	m_2	0	m_3	+∞
$m(m^2 + 3m - 9)$	-	- 0 +	+ 0 -	- 0 +	+

$$m \in \left(-\infty, \frac{-3(1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[0, \frac{-3(1-\sqrt{5}}{2}\right].$$

c) Avem $f(1)=0 \Leftrightarrow 2m+2=0 \Leftrightarrow m=-1$. Avem de rezolvat ecuația $x^3-x^2+2x-2=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)+2(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2)=0$. Ecuația are o singură rădăcină reală, $x=1$.

3. Rezolvați ecuația $x^4-2x^3-x^2-2x-2=0$ în mulțimea numerelor complexe, știind că admite soluția $x_1=1-\sqrt{3}$.

<u>Soluție</u>:

Ecuația admite și soluția $x_2=1+\sqrt{3}$. Folosind relațiile lui Viete avem

$x_1+x_2+x_3+x_4=2$

$x_1x_2x_3x_4=-2$

Obținem deci sistemul

$$\begin{cases} x_3+x_4=0 \\ x_3x_4=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4=-x_3 \\ -x_3^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x_3=i,\ x_4=-i$$